Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten:

1. Additions- und Subtraktionsverfahren

$$\left|\begin{array}{l} 2y = 4 - 5x \\ 3x = 7y - 55 \end{array}\right|$$

Beide Gleichungen müssen so umgeformt werden, dass die Variablen links und die Zahl rechts vom Gleichheitszeichen stehen. Gleiche Variablen müssen untereinander gestellt werden!

$$\begin{array}{l} 2y = 4 - 5x \quad | + 5x \\ 3x = 7y - 55 \quad | - 7y \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrl} 5x + 2y & = & 4 & | \cdot 3 \\ 3x - 7y & = & -55 & | \cdot 5 \end{array}$$

Die Gleichungen müssen nun so erweitert werden, dass eine der beiden Variablen in beiden Gleichungen den gleichen Koeffizienten erhält (Vorzeichen unwichtig)

$$\begin{array}{r|rcr} & 15x + 6y & = & 12 \\ - & 15x - 35y & = & -275 \\ \hline \end{array}$$

Haben die nun gleichen Koeffizienten das gleiche Vorzeichen, werden die Gleichungen subtrahiert, haben sie ungleiche Vorzeichen, so werden sie addiert.

$$\begin{array}{rcl} 41y & = & 287 \quad | : 41 \\ y & = & 7 \end{array}$$

Es entsteht eine Gleichung mit einer Unbekannten, die gelöst werden muss.

$$\begin{array}{rcl} 3x & = & 7 \cdot 7 - 55 \\ 3x & = & 49 - 55 \\ 3x & = & -6 \quad | : 3 \\ x & = & -2 \end{array}$$

Die berechnete Lösung der ersten Variable wird in eine der beiden Gleichungen eingesetzt. Es entsteht eine weitere Gleichung mit einer Unbekannten, die wiederum gelöst wird.

$L = \{ (-2 \mid 7) \}$

Angabe der Lösung als Lösungsmenge

oder

$S (-2 \mid 7)$

als Schnittpunkt mit seinen Koordinaten

2. Gleichsetzungsverfahren

$$\left| \begin{array}{l} 2y = 4 - 5x \\ 3x = 7y - 55 \end{array} \right|$$

Beide Gleichungen müssen so umgeformt werden, dass die gleiche Variable links und die Zahl und die andere Variable rechts vom Gleichheitszeichen stehen.

$$\begin{array}{l} 2y = 4 - 5x \quad | + 5x - 2y \\ 3x = 7y - 55 \quad | \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x = 4 - 2y \quad | \cdot 3 \\ 3x = -55 + 7y \quad | \cdot 5 \end{array}$$

Die Gleichungen müssen nun so erweitert werden, dass die Variable links vom Gleichheitszeichen den gleichen Koeffizienten erhält (Vorzeichen beachten!!)

$$\begin{array}{l} 15x = 12 - 6y \\ 15x = -275 + 35y \end{array}$$

Die beiden auf der rechten Seite entstandenen Terme werden nun gleichgesetzt.

$$\begin{array}{r} 15x = 15x \\ 12 - 6y = -275 + 35y \quad | -35y - 12 \end{array}$$

Die jeweils links stehenden Terme sind gleich, also sind auch die rechten Terme gleich.

$$\begin{array}{l} -41y = -287 \quad | :(-41) \\ y = 7 \end{array}$$

Es entsteht eine Gleichung mit einer Unbekannten, die gelöst werden muss.

$$\begin{array}{l} 3x = 7 \cdot 7 - 55 \\ 3x = 49 - 55 \\ 3x = -6 \quad | : 3 \\ x = -2 \end{array}$$

Die berechnete Lösung der ersten Variable wird in eine der beiden Gleichungen eingesetzt. Es entsteht eine weitere Gleichung mit einer Unbekannten, die wiederum gelöst wird.

$L = \{ (-2 \mid 7) \}$

Angabe der Lösung als Lösungsmenge

oder

als Schnittpunkt mit seinen Koordinaten

$S(-2 \mid 7)$

3. Einsetzungsverfahren

$$\left|\begin{array}{l} 2y + 5x = 4 \\ 3x - 7y = -55 \end{array}\right|$$

Eine der beiden Gleichungen muss so umgeformt werden, dass eine der Variablen links und die Zahl und die andere Variable rechts vom Gleichheitszeichen stehen.

$$\begin{array}{l} 2y + 5x = 4 \quad | \; -5x \\ 3x - 7y = -55 \end{array}$$

Die gerade bearbeitete Gleichung wird normiert (d.h. Koeffizient = 1)

$$\begin{array}{l} 2y = 4 - 5x \quad | : 2 \\ 3x - 7y = -55 \end{array}$$

Auf der anderen Seite entsteht ein Term mit der zweiten Variablen.

$$\begin{array}{l} y = 2 - 2\tfrac{1}{2}\,x \\ 3x - 7y = -55 \end{array}$$

Der berechnete Term wird für die Variable in die andere Gleichung eingesetzt.

$$3x - 7(2 - 2\tfrac{1}{2}\,x) = -55$$

$$3x - 14 + 17\tfrac{1}{2}x = -55$$

$$20\tfrac{1}{2}x - 14 = -55 \quad | + 14$$

$$20\tfrac{1}{2}x = -41 \quad | : 20\tfrac{1}{2}$$

$$x = -2$$

Es entsteht eine Gleichung mit einer Unbekannten, die gelöst werden muss.

$$\begin{array}{rcl} 5 \bullet (-2) + 2y &=& 4 \\ -10 + 2y &=& 4 \; | + 10 \\ 2y &=& 14 \; | : 2 \\ y &=& 7 \end{array}$$

Die berechnete Lösung der ersten Variable wird in eine der beiden Gleichungen eingesetzt. Es entsteht eine weitere Gleichung mit einer Unbekannten, die wiederum gelöst wird.

$L = \{ (-2 \,|\, 7) \}$

Angabe der Lösung als Lösungsmenge

oder

$S(-2 \,|\, 7)$

als Schnittpunkt mit seinen Koordinaten

4. Determinantenverfahren

$$\left| \begin{array}{l} 2y = 4 - 5x \\ 3x = 7y - 55 \end{array} \right|$$

Beide Gleichungen müssen so umgeformt werden, dass die Variablen links und die Zahl rechts vom Gleichheitszeichen stehen. Gleiche Variablen müssen untereinander gestellt werden!

$$\begin{array}{l} 2y = 4 - 5x \quad | + 5x \\ 3x = 7y - 55 \quad | - 7y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x + 2y = 4 \\ 3x - 7y = -55 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$$

Für die Hauptdeterminante D werden die Koeffizienten der beiden Variablen benutzt. (d.h. es wird die linke Seite des Gleichungssystems ohne die Variablen x und y übernommen.) Steht dabei nur x, dann ist der Koeffizient 1, bei –x lautet er –1.

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -55 & -7 \end{vmatrix}$$

Zur Bildung der Nebendeterminante D_x werden die Koeffizienten, die bei den x-Variablen gestanden haben, durch die Zahlen rechts vom Gleichheitszeichen ersetzt. (wichtig: die neuen Zahlen müssen dort eingesetzt werden, wo die anderen Zahlen gestanden haben; Prinzip: diese Wohnung wird neu vermietet! Nachmieter stehen vor der Tür $\longrightarrow$ Gleichheitszeichen (hier: die Zahlen 4 und – 55).

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -55 \end{vmatrix}$$

Zur Bildung der Nebendeterminante D_y werden die Koeffizienten, die bei den y-Variablen gestanden haben, durch die Zahlen rechts vom Gleichheitszeichen ersetzt.(Prinzip s.o.)

Allgemeine Formel :

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Eine 2x2 Determinante wird nach nebenstehender Regel aufgelöst: (In Worten: Produkt der Zahlen aus der Hauptdiagonale minus Produkt der Zahlen der Nebendiagonale)

$$D = 5 \bullet (-7) - 3 \bullet 2 = -35 - 6 = -41$$
$$D_x = 4 \bullet (-7) - (-55) \bullet 2 = -28 + 110 = 82$$
$$D_y = 5 \bullet (-55) - 3 \bullet 4 = -275 - 12 = -287$$

x und y werden mit nebenstehender Formel berechnet.

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{82}{-41} = -2$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-287}{-41} = 7$$

Angabe der Lösung als Lösungsmenge
oder
als Schnittpunkt mit seinen Koordinaten

$L = \{ (-2 \mid 7) \}$ oder $S(-2 \mid 7)$

<u>Aufgaben zur Lösung von linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten:</u>

Verwende beim Lösen der Aufgaben alle Lösungsmethoden!!!

<u>Aufg. 1:</u>

$$\left| \begin{array}{l} 2x + 5y = 23 \\ 2x = -1 + 3y \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 2:</u>

$$\left| \begin{array}{r} 4x = 11 - 3y \\ x + y = 9 \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 3:</u>

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 5y = 18 \\ 10y = -6x + 1 \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 4:</u>

$$\left| \begin{array}{r} -x + 7y = 5 \\ 3x + 5y = 11 \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 5:</u>

$$\left| \begin{array}{l} 6y - x = 8 \\ 4x + 3y = -5 \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 6:</u>

$$\left| \begin{array}{l} x - 5y = 17 \\ 2x + 3y = -5 \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 7:</u>

$$\left| \begin{array}{r} 2x - 3y = 6 \\ -3x + 4{,}5y = -9 \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 8:</u>

$$\left| \begin{array}{l} y = -4x + 23 \\ 2y = 6x - 24 \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 9:</u>

$$\left| \begin{array}{r} x - 3y = -4 \\ 3x - 5y = -4 \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 10:</u>

$$\left| \begin{array}{l} -10x + 16y = -21 \\ 9x - 8y = 25 \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 11:</u>

$$\left| \begin{array}{r} y = 4x + 2 \\ -8x + 2y = 4 \end{array} \right|$$

<u>Aufg. 12:</u>

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 5y = 38 \\ y = 6x + 1 \end{array} \right|$$

Lösungen : Schnittpunkte S	Lösungsmengen
1.) (4 | 3)	{(4 | 3)}
2.) (- 16 | 25)	{(- 16 | 25)}
3.) kein Schnittpunkt (Geraden liegen parallel)	{ }
4.) (2 | 1)	{(2 | 1)}
5.) (- 2 | 1)	{(- 2 | 1)}
6.) (2 | - 3)	{(2 | - 3)}
7.) allgemeingültig (Geraden sind identisch)	$\{(x\|y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R} \mid 2x - 3y = 6\}$
8.) (5 | 3)	{(5 | 3)}
9.) (2 | 2)	{(2 | 2)}
10.) ($3\ {}^{5}/_{8}$ | ${}^{61}/_{64}$)	{($3\ {}^{5}/_{8}$ | ${}^{61}/_{64}$)}
11.) allgemeingültig (Geraden sind identisch)	$\{(x\|y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R} \mid y = 4x + 2\}$
12.) (1 | 7)	{(1 | 7)}